Übungsstunde lineare Algebra:

Heutige Themen:

- LR-Zerlegung
- Inverse $\to$ Gauss-Jordan Algorithmus
- Die Transponierte
- Euklidische Norm & Skalarprodukt
- Orthogonale Matrizen & Vektoren

LR-Zerlegung:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

Beispiel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{R}} \to \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{L}}\,\underbrace{\underline{\underline{R}}\,\underline{x}}_{\underline{c}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{b}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L}} \cdot \underline{c} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{b} \quad \Rightarrow \underline{c}$$

$$\underline{\underline{R}} \cdot \underline{x} = \underline{c} \quad \Rightarrow \underline{x}$$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\underline{\underline{P}}} \left| \underbrace{\begin{matrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{matrix}}_{\underline{\underline{A}}} \right. \xrightarrow[\mathrm{III} - (-1\,\mathrm{I})]{\mathrm{II} - (+3\,\mathrm{I})} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -8 & 5 \end{matrix} \right.$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III} - (-2\,\mathrm{II})} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\underline{\underline{P}}} \left| \underbrace{\begin{matrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}}_{\underline{\underline{R}}} \right.$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b}$$

$$\left.\begin{aligned} \underbrace{\underline{\underline{L}}^{-1}\underline{\underline{L}}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} &= \underline{\underline{L}}^{-1}\underline{\underline{P}}\,\underline{b} \\ \underline{\underline{I}}\;\underline{\underline{R}}\,\underline{x} &= \underline{\underline{L}}^{-1}\underline{\underline{P}}\,\underline{b} \end{aligned}\right\} \text{Etwas Intuition}$$

$$\underline{\underline{L}}\,\underline{c} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b} \qquad \Big|\; \underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\begin{array}{ccc|c|c} c_1 & c_2 & c_3 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 3 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{aligned} c_1 &= \underline{1} && 1 \\ c_2 &= -3c_1 = \underline{-3} && -1 \\ c_3 &= c_1 + 2c_2 + 2 = \underline{-3} && 2 \end{aligned}\right\} \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & & \\ 2 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_3 &= \underline{-1} && \tfrac{2}{3} \\ x_2 &= \tfrac{1}{4}(x_3 - 3) = \underline{-1} \\ x_1 &= \tfrac{1}{2}(x_2 + 3x_3 + 1) = \underline{-\tfrac{3}{2}} \end{aligned}\right\} \underline{x} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

Beispiel mit Zeilenvertauschung:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 & 8 \end{array} \xrightarrow[\mathrm{III}-(-\mathrm{I})]{\mathrm{II}-(3\mathrm{I})} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 5 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

Matrixinverse: (für $n \times n$ Matrizen!)

Ist diejenige Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ zur Matrix $\underline{\underline{A}}$ für welche gilt:

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$$

$x + 7 = 15$

$\cdot 3$

Formel für 2×2 Matrizen:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan-Algorithmus:

$a \cdot \frac{1}{a} = 1$

a^{-1}

$$\rightarrow \underline{\underline{A}} \mid \underline{\underline{I}} \xrightarrow{\text{Gauss}} \underline{\underline{I}} \mid \underline{\underline{A}}^{-1}$$

$a \cdot x = 7$

$x = \cancel{7 \cdot \frac{1}{a}}$

$\frac{1}{a} \cdot 7$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{I}}\,\underline{b}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{b}$$

$$\underline{\underline{I}} \cdot \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{b}$$

Beispiel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{II} - \frac{1}{2}\mathrm{I}} \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{I} - 2\mathrm{II}} \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I} : 4} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \multirow{2}{*}{$\underbrace{\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{array}}_{\underline{\underline{A}}^{-1}}$} \\ 0 & 1 & \end{array}\right]$$

Formel: $\underline{\underline{A}}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \dfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

HA: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mit Gauss-Jordan

Transponierte:

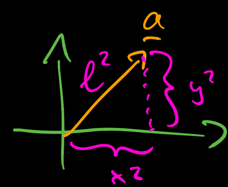
→ "Spiegeln" an der Hauptdiagonalen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Euklidische Norm & Skalarprodukt:

Norm: Ein Mass von "Länge" von Vektoren.



Beispiel:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \|\underline{b}\|_2 = \|\underline{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

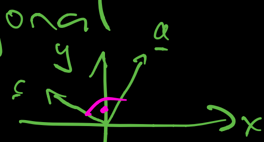
Skalarprodukt: Mass für "Winkel" oder allgemeiner, für die Orthogonalität ⇔ Rechtwinkligkeit

Beispiel:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \underline{a}^T \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 + 6 = \underline{8} \neq 0 \rightarrow$$ $\underline{a}$ steht nicht orthogonal auf $\underline{b}$

$$\langle \underline{a}, \underline{c} \rangle = \underline{a}^T \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 + 2 = \underline{0} \Rightarrow$$ Orthogonal



Orthogonale Matrizen & Vektoren:

Orthogonale Vektoren stehen senkrecht aufeinander. Orthogonale Matrizen haben aber orthonormale Spaltenvektoren => die Spaltenvektoren stehen senkrecht aufeinander und haben Länge 1!

Beispiele:

$$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = -\frac{2\sqrt{5}}{9} + \frac{2\sqrt{5}}{9} = \underline{\underline{0}}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{5}{9}} = \underline{\underline{1}}$$

Wichtig! Wird oft vergessen.

Eigenschaften:

- Spalten & Zeilen sind orthonormal
- $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^T$ falls $\underline{\underline{A}}$ orthogonal
- $\underline{\underline{A}}$ beschreibt eine reine Drehung o. Drehspiegelung
- $\det(A) = 1$ Drehung
  o. -1 Drehspiegelung